Test 1 – Sujet A

Résoudre **un seul** exercice entre les deux proposés ci-dessous.

Exercice 1 (Nombres complexes)

(i) Calculer les opérations suivantes :

$$(2+i)\ +\ (1+3i)\ ,\quad (2+i)\,(1+3i)\ ,\quad \frac{2+i}{1+3i}\ .$$

Dessiner les résultats dans le plan complexe.

(ii) Résoudre l'équation complexe suivante :

$$z^2\ -\ (3+4i)z\ -\ 1\ +\ 7i\ =\ 0\,.$$

(iii) Factoriser en polynômes complexes irréductibles le polynôme X^2+4.

Exercice 2 (Combinaisons linéaires) Soient $\overrightarrow{u}=(1,2,1)$ et $\overrightarrow{v}=(2,1,3)$.

(i) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{E}=(1,-7,4)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(ii) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{F}=(0,-3,5)$ ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Après, calculer le produit scalaire entre $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$.

(iii) Dire pour quelles valeurs de $x\in\mathbb{R}$ le vecteur $\overrightarrow{G}=(0,-3,x)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Test 1 – Sujet A

NOM et PRÉNOM (lisibles) :

Résolution de l'exercice

Test 1 – Sujet A

Corrigé du test

Exercice 3 (Nombres complexes)

(i) On trouve $(2+i)+(1+3i)=3+4i$ et $(2+i)\,(1+3i)=-1+7i$; en plus, on a

$$\frac{2+i}{1+3i} = \frac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \ldots = \frac{1-i}{2}$$

(ii) On applique la formule pour la résolution des équations du deuxième degré, après avoir noté que

$$\Delta = \delta^2 = -3-4i \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = 1-2i$$

(pour cela, on résout $(a+ib)^2=-3-4i$). Finalement, on trouve $z_1=2+i$ et $z_2=1+3i$.

(iii) Par la loi de la différence des carrés, on a $X^2+4 = (X+2i)\,(X-2i)$.

Exercice 4 (Combinaisons linéaires)

(i) En écrivant $\overrightarrow{E} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, avec α et β réels, on se ramène au système

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=1 \\ 2\alpha+\beta=-7 \\ \alpha+3\beta=4\,. \end{cases}$$

On obtient que la solution est donnée par $\alpha=-5$ et $\beta=3$.

(ii) En raisonnant comme dans le point (i), on arrive à résoudre

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ 2\alpha+\beta=-3 \\ \alpha+3\beta=5\,. \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solutions : les deux premières équations donnent $\alpha=-2$ et $\beta=1$, mais ces valeurs ne vérifient pas la troisième équation.

On a $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{F} = 1\cdot 0+(-7)\cdot(-3)+4\cdot 5 = 41$.

(iii) Comme dans le point précédent, on doit résoudre

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ 2\alpha+\beta=-3 \\ \alpha+3\beta=x\,. \end{cases}$$

Encore une fois, les deux premières équations donnent $\alpha=-2$ et $\beta=1$. En introduisant ces valeurs dans la troisième équation, on trouve finalement $x=1$.